QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$ alors $\lim\limits_{+\infty} g$ est égale à

☐ $+\infty$. ☐ n'existe pas. ☐ $-\infty$.

2. Si f est une fonction continue et décroissante sur $[2, 5]$ et si $f([2, 5]) = [1, 3]$ alors

☐ $f(2) = 3$ et $f(5) = 1$. ☐ $f(2) = 1$ et $f(5) = 3$. ☐ $1 < f(2) < 3$.

3. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[-2, 5]$ tel que $f(-2) = 3$ et $f(5) = -2$ alors l'équation $f(x) = -1$

☐ n'admet pas de solution dans $[-2, 5]$. ☐ admet au moins une solution dans $[-2, 5]$. ☐ admet exactement une solution dans $[-2, 5]$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction paire et si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
3. Si une fonction admet une limite finie en $-\infty$ et une limite finie en $+\infty$ alors elle est bornée.
4. Si une fonction f n'est pas définie en a alors nécessairement la droite $\Delta : x = a$ est une asymptote verticale à C_f.
5. Soit f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x,

   $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

   Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 5$ alors f admet une limite finie en $+\infty$.

1 Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de cet ensemble.

$x \mapsto |x^2 - x - 3|$; $x \mapsto x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$;

$x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $x \mapsto (|x+1| - 2)^5$; $x \mapsto \dfrac{3x^2 - |x|}{x^2 + 4}$;

$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x + 1}$; $x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{\sin x - 1}$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -1, \\ 2x^2 + x & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Montrer que f est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de chacune des équations ci-dessous.

$f(x) = -3$; $f(x) = -1$; $f(x) = 0.5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 4$.

3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq -2, \\ \dfrac{2x^2 - |x^3|}{x+2} & \text{si } x < -2. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en -2.
2. Etudier la continuité de f sur $]-\infty, -2[$ et sur $[-2, +\infty[$.
3. La fonction f est –elle continue sur $\mathbb{R}$?

4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \\ \dfrac{1 - x^3}{1 - x^2} & \text{si } -1 < x < 1. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à gauche et à droite en -1.
2. Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$, $]-1, 1[$ et $[1, +\infty[$.

5 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{x - 2}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 2.

6 Dire dans chacun des cas suivants, si la fonction f admet un prolongement par continuité en a.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$, $a = 0$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$, $a = -1$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + 3x}{x}$, $a = 0$.

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2 - x - 2)}{|x|(x-2)} & \text{si } x \neq 2 \text{ et } x \neq 0, \\ 3 \quad \text{si } x = 2, \quad 2 \quad \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

8 Soit la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x||x-2|}{x(x^2 - x - 2)} & \text{si } x \neq 2, \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier les limites de f en -1 , $+\infty$ et $-\infty$.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

9 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-2}{x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-2x^3}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-2x^3}{x^2-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-3}{x^2-3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer le prolongement par continuité de la fonction f en x_0.

1. $f:x\mapsto\dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1}$, $x_0=-1$.

2. $f:x\mapsto\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{4x-\pi}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

3. $f:x\mapsto\dfrac{\cos(4x)-1}{x^2}$, $x_0=0$.

11 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f.

1. $f:x\mapsto\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x}\right)$ en $-\infty$.

2. $f:x\mapsto\sin\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)$ en $+\infty$.

3. $f:x\mapsto\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$ en 0^+.

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(1-\cos x)$.

13 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier la limite en 0 de f.

1. $f:x\mapsto x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

2. $f:x\mapsto 1+x^2\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

3. $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}+\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

14 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f.

1. $f:x\mapsto\dfrac{1+\cos x}{x}$.

2. $f:x\mapsto\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{|x|}}$.

3. $f:x\mapsto\dfrac{x+x\cos x}{x^4+x^2+3}$.

15 1. Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\sin x}\le 1$.

2. En déduire le comportement en $+\infty$ des fonctions $x\mapsto\dfrac{x}{2-\sin x}$ et $x\mapsto\dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$.

16 Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$.

1. Trouver un réel $M>0$ tel que $|xf(x)|\le M$, pour tout réel x.

2. En déduire le comportement de f en $-\infty$ et $+\infty$.

17 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(2-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

1. a. Montrer que pour tout $x>0$, $f(x)\ge\dfrac{1}{x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $x<0$, $f(x)\le\dfrac{1}{x}$.

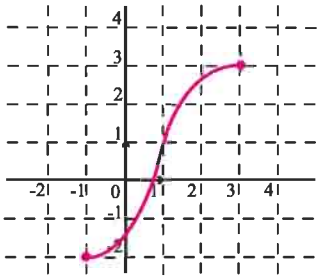
b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

18 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$, $I =]2, +\infty[$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$, $I =]-\infty, 0]$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$, $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. $f : x \mapsto \tan(\pi x)$, $I = \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right]$.

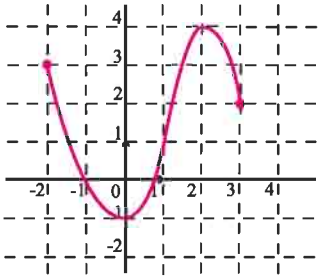
19 Dans chacun des cas ci-dessous donner $f(I)$.

1.



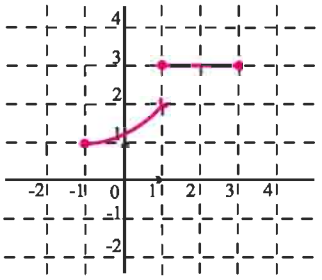
$I = [-1, 3]$

2.



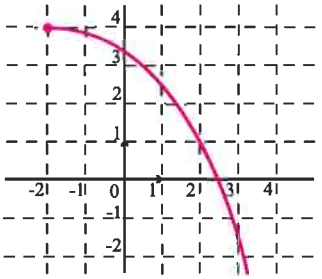
$I = [-2, 3]$

3.



$I = [-1, 3]$

4.



$I = [-2, 2[$

20 Dans chacun des cas suivants, tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et donner $f(I)$.

1. $f : x \mapsto -x+3$, $I = [1,4]$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $I =]-\infty, 0[$.
3. $f : x \mapsto x^2+1$, $I =]-1,2]$.

21 Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + 10x - 1$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $[0, 1]$.

b. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

22 Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x + 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution a dans $[-1, 0]$.

3. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

23 Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 12x + 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal.
2. Vérifier graphiquement que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en trois points M_1, M_2 et M_3 dont les abscisses seront notées x_1, x_2, et x_3, avec $x_1 < x_2 < x_3$.
2. Montrer que x_1 appartient à $]-4,-3[$.

3. Donner pour x_2, et x_3 un encadrement par deux entiers consécutifs.
4. Discuter suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
5. Donner le nombre de solutions de l'équation $|f(x)| = 1$.

24 1. On considère la fonction

$h : x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$.

a. Montrer que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b. Déterminer $h(]0, +\infty[)$.

c. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[2, 3]$ une unique solution α.

d. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

2. Représenter dans un repère orthogonal, les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par

$f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x} + 1$.

25 On considère la fonction $f : x \mapsto \cos x - x$.

1. Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

26 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

On pose $g(x) = f(x) - x$.

1. Quel est le signe de $g(0)g(1)$?

2. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Application

Montrer que l'équation $\cos\frac{\pi}{2}x = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

QCM

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2) f(2)=3 et f(5)=1

3) admet au moins une solution dans $[-2,5]$

Vrai - Faux

1) (vrai)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = \lim\limits_{X\to-\infty} f(X) = -\infty$

2) (Faux) : contre exemple : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ croissante sur IR

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

3) (faux)

contre exemple : $f(x)=\frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

f n'est pas bornée

$(\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty)$

4) (faux)

contre exemple : $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$

$\Delta : x = 0$ n'est pas une asymptote à (ζ_f)

5) (faux)

contre exemple : f(x)=4+sinx

$g(x)=3-\frac{1}{1+x^2}$; $h(x)=5+\frac{1}{1+x^2}$

on a : $g(x) \le f(x) \le h(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 5$

mais f n'a pas de limite en $+\infty$

EXERCICE№1

a) $f(x) = |x^2 - x - 3|$; $D_f = \mathbb{R}$

la fonction : $x \longmapsto x^2 - x - 3$ est continue sur IR (fonction polynôme)

d'où f est continue sur IR

b) $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$; $D_f = \mathbb{R}$

la fonction : $x \longmapsto x^2 + 1$ est continue et positive sur IR d'où

la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est continue sur IR et par suite f est continue sur IR comme étant somme de deux fonction continues

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$		

$D_f =]-\infty , -1] \cup]1 , +\infty[$

la fonction : $x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$ est continue et positive sur chacun des intervalles :

$]-\infty , -1]$ et $]1 , +\infty[$, par suite f est continue sur D_f

d) $f(x) = (|x + 1| - 2)^5$ est définie et continue sur tout IR

e) $f(x) = \frac{3x^2 - |x|}{x^2 + 4}$ est définie et continue sur tout IR

f) $f(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$ est définie et continue sur tout IR

$(1 + \cos^2 x \neq 0$ pour tout $x \in$ IR)

g) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x - 1}$; $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

f est définie et continue sur tout IR\ $\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z} \}$

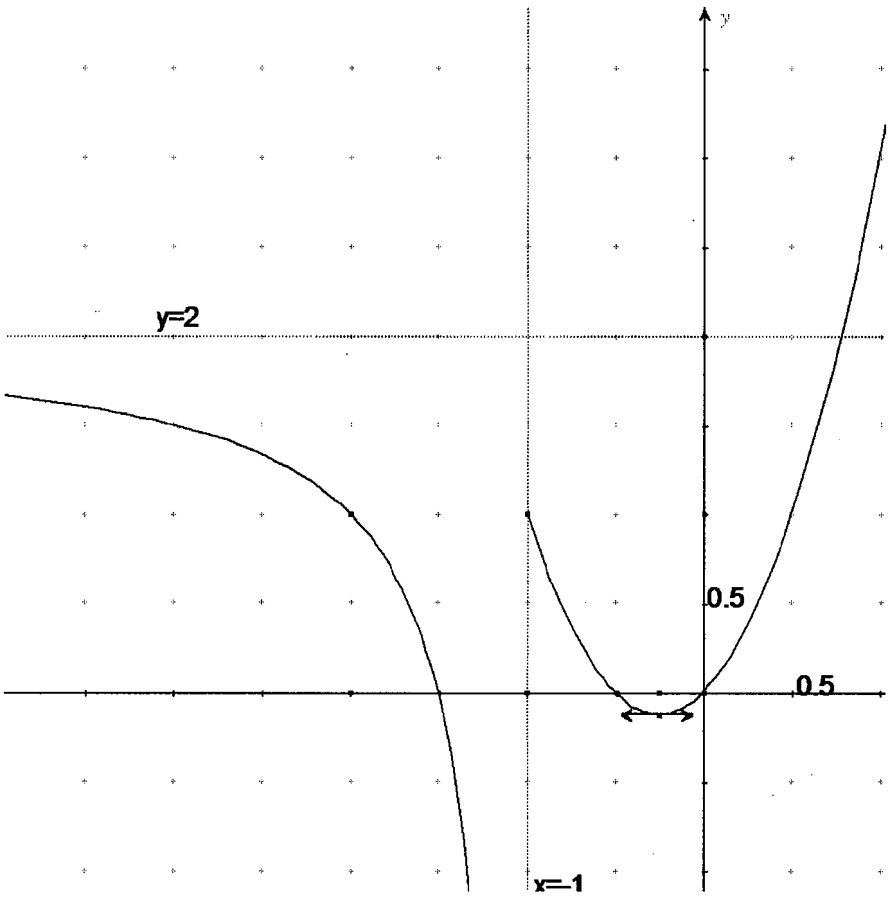
EXERCICE№2

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{x+1} & si \quad x < -1 \\ 2x^2 + x & si \quad x \geq -1 \end{cases}$$

1)

sur $]-\infty , -1[$ $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$ $\Rightarrow$ f est décroissante sur $]-\infty , -1[$.

sur $]-1 , +\infty[$ $f'(x) = 4x + 1$



2) la fonction : $x \longmapsto 2 + \frac{1}{x+1}$ est continue sur IR\{ -1 }

En particulier sur]-∞ , -1[d'où f est continue sur]-∞ , -1[

De même f est continue sur]-1 , +∞ [

3) f(-1) = 1

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} 2 + \frac{1}{x+1} =$ - ∞ d'où f n'est pas continue en -1

4) * chacune des équations $f(x)$ = -3 et $f(x)$ = -1 admet une unique solution

* chacune des équations $f(x)$ = 0,5 et $f(x)$ = 1 admet trois solutions

* l'équations $f(x)$ = 4 admet une unique solution.

EXERCICE№3

1) f(-2) = 0

$\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} \sqrt{x+2} = 0 = f(-2)$; f est continue à droite en (-2)

$\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^-} \frac{2x^2+x^3}{x+2} = \lim\limits_{x \to (-2)^-} (x^2) = 4 \neq f(-2)$

Conclusion : f n'est pas continue en (-2)

2) f est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty , -2[$ et $]-2 , +\infty[$

3) f n'est pas continue sur IR car elle n'est pas continue en (-2)

EXERCICE№4

1) f(-1) = 0

* $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \sqrt{x^2-1} = 0 = f(-1)$

f est continue à gauche en (-1)

* $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x)} = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{(1+x+x^2)}{(1+x)} = +\infty$

f n'est pas continue à droite en (-1)

2) * la fonction: $x \longmapsto x^2 - 1$ est continue et positive sur chacun des intervalles $]-\infty , -1]$ et $[1 , +\infty[$

d'où f est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty , -1]$ et $[1 , +\infty[$

* la fonction: $x \longmapsto \frac{1-x^3}{1-x^2}$ est continue sur $IR\setminus\{-1 , 1\}$:

en particulier sur]-1,1[d'où f est continue sur]-1,1[

EXERCICE№5

$f(x) = \frac{x^3+3x^2-6x-8}{x-2}$

1) $D_f = IR\setminus\{2\}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

On a : $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x-2)(x^2 + 5x + 4)$ d'où pour $x \neq 2$

$f(x) = x^2 + 5x + 4$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 18$

3) f admet une limite fini en 2 d'où f est prolongeable par continuité en 2

EXERCICE№6

1) * pour $x \in]0 , 1[$, $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x+1}{x-1}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x+1}{x-1} = -1$

* pour $x \in]-1 , 0[$, $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x} = \frac{x-1}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x+1} = -1$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$, alors f admet un prolongement par continuité en 0

2) pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$: $f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(x^2-x+1)}{(1-x)}$,

D'où : $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x) = \frac{3}{2}$, f admet un prolongement par continuité en(-1)

3) pour $x \neq 0$; , $f(x) = 3 + \frac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 3 + \frac{\sin x}{x} = 4$ (1)

alors f admet un prolongement par continuité en 0

EXERCICE№7

1) $f(0) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x(x^2-x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1 \neq f(0)$ d'où f n'est pas continue en 0

2) $f(2) = 3$

pour $x \in]0, +\infty[\backslash\{2\}$; $f(x) = x + 1$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x+1) = 3 = f(2)$ d'où f est continue en 2.

EXERCICE№8

1) $x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 2$

$D_f = \mathbb{R}^*\backslash\{-1\}$

2)

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	- 0	+

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} -\frac{|x-2|}{x^2-x-2} = +\infty$ (de la forme $-\frac{3}{0^-}$)

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$ Donc f n'admet pas de limite en (-1) car la limite à gauche est différent de la limite à droite

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x-2)}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

3) pour $x \in]0, 2[$

$f(x) = \frac{-x(x-2)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1}{x+1} = -1$

pour $x \in]-1, 0[$

$f(x) = \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1$

f n'admet pas de limite en 0 car la limite à gauche est différent de la limite à droite d'où f n'admet pas un prolongement par continuité en 0.

EXERCICE№9

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{-2}{x-1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-2}{x-1} = +\infty$

2)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
x^2-1	+	‖	-	‖	+

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(\frac{-2x^3}{x^2-1}\right) = -\infty$ (de la forme $\frac{2}{0^-}$) ; $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \left(\frac{-2x^3}{x^2-1}\right) = +\infty$

3)

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	‖	-	‖	+

$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{-3}{x^2-3x+2}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{-3}{x^2-3x+2}\right) = +\infty$

4) pour $x>0$; $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

Pour $x<0$; $\sqrt{1+x^2} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$

EXERCICE№10

1) Pour $x \neq -1$: $f(x) = \frac{(x+1)(x^2+2x-4)}{(x+1)} = x^2+2x-4$

$\lim\limits_{x \to (-1)} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)} (x^2+2x-4) = -5$

$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ -5 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f en (-1)

2) $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}\cos x}{4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$; on pose $X = x - \frac{\pi}{4}$ alors $\begin{matrix} x \to \frac{\pi}{4} \\ X \to 0 \end{matrix}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{X \to 0} \frac{1-\sqrt{2}\cos(X+\frac{\pi}{4})}{4X} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{1-\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}.\cos X - \sin\frac{\pi}{4}.\sin X)}{4X}$

$= \lim\limits_{X \to 0} \frac{1-\cos X+\sin X}{4X} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{1}{4}\left[\underbrace{\frac{1-\cos X}{X}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sin X}{x}}_{\to 1}\right] = \frac{1}{4}$

$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{16(\cos(4x)-1)}{(4x)^2}$; on pose $X = 4x$

$\lim\limits_{X \to 0} 16\left[\frac{\cos X-1}{X^2}\right] = \lim\limits_{X \to 0}\left[-16\left(\frac{1-\cos X}{X^2}\right)\right] = -8$ d'où : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ -8 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

EXERCICE№11

1) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{x}\right)$; $f = v \circ u$ avec $\begin{cases} u(x) = \frac{\pi x+1}{x} \\ v(x) = \cos x \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \pi$ et $\lim\limits_{x \to \pi} v(x) = -1$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x}$; on pose $X = x^2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{\sin X}{\sqrt{X}} = \lim\limits_{X \to 0^+} \sqrt{X}.\frac{\sin X}{X} = 0$ (0 · 1)

EXERCICE№12 $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(\sin x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(1- \cos x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0} (1- \cos x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

EXERCICE№13

1) pour $x \neq 0$; $0 \leq |\sin(\frac{2}{x})| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |x|.|\sin(\frac{2}{x})| \leq |x| \Rightarrow |f(x)| \leq |x|$

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2) pour $x \neq 0$; $-1 \leq \sin(\frac{2}{x}) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2.\sin(\frac{2}{x}) \leq x^2$

$\Rightarrow 1- x^2 \leq 1+ x^2.\sin(\frac{2}{x}) \leq 1+ x^2$

$\lim\limits_{x \to 0}(1- x^2) = \lim\limits_{x \to 0}(1+ x^2) = 1$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} 1+ x^2 \sin(\frac{2}{x}) = 1$

3) pour $x > 0$; $\sin(\frac{2}{x}) \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \sin(\frac{2}{x}) \geq \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{x} - 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+}(\frac{1}{x} - 1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

pour $x < 0$; $\sin(\frac{2}{x}) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x} + 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-}(\frac{1}{x} + 1) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; par suite f n'admet pas de limite en 0

EXERCICE№14

1) * pour $x>0$; $0\le 1+\cos x\le 2 \Rightarrow 0\le \frac{1+\cos x}{x}\le \frac{2}{x} \Rightarrow 0\le f(x)\le \frac{2}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{x}) = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

* pour $x<0$; $0\le 1+\cos x\le 2 \Rightarrow 0\ge f(x)\ge \frac{2}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{2}{x}) = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

2) * pour $x\neq 0$; $0\le 1+\cos x\le 2 \Rightarrow 0\le f(x)\le \frac{2}{\sqrt{|x|}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{|x|}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{|x|}}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3) * pour $x\in IR$; $0\le 1+\cos x\le 2 \Rightarrow 0\le |x|(1+\cos x)\le 2|x|$

$\Rightarrow 0\le \frac{|x|(1+\cos x)}{x^4+x^2+3}\le \frac{2|x|}{x^4+x^2+3} \Rightarrow 0\le |f(x)|\le \frac{2|x|}{x^4+x^2+3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2|x|}{x^4+x^2+3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2|x|}{x^4+x^2+3}=0$ d'où

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}|f(x)|=0$ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=0$

EXERCICE№15

1) * pour $x\in IR$; $-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow -1\le -\sin x\le 1 \Rightarrow 1\le 2-\sin x\le 3$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\le \frac{1}{2-\sin x}\le 1$

2) * pour $x>0$; $\frac{1}{2-\sin x}\ge\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{2-\sin x}\ge\frac{x}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{3})=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\sin x}=+\infty$

* Soit $f(x) = \frac{x+\sin x}{2-\sin x} = \frac{(x+2)+(\sin x-2)}{2-\sin x} = \frac{(x+2)}{2-\sin x} - 1$

* pour $x>0$; $\frac{1}{2-\sin x}\ge\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x+2}{2-\sin x}\ge\frac{1}{3}(x+2) \Rightarrow f(x)\ge\frac{1}{3}(x-1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}(x-1)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

EXERCICE№16

$f(x)=\frac{x\cos x}{x^2+1}$

1) $|xf(x)| = \frac{x^2}{x^2+1}|\cos x| = (1-\frac{1}{x^2+1})|\cos x|$

$|\cos x|\le 1$ et $1-\frac{1}{x^2+1}\le 1$ d'où $|xf(x)|\le 1$

2) $|f(x)|\le\frac{1}{|x|}$ pour $x\neq 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

EXERCICE№17

$$f(x)=\frac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x} \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^*$$

1) a) pour x>0 $\sin(\frac{1}{x})\le 1 \Rightarrow -\sin(\frac{1}{x})\ge -1 \Rightarrow 2-\sin(\frac{1}{x})\ge 1$

$$\Rightarrow \frac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x}\ge\frac{1}{x} \quad (\text{car } x>0) \Rightarrow f(x)\ge\frac{1}{x}$$

b) $f(x)\ge\frac{1}{x}$ pour x>0 et $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

2) a) pour x<0 $2-\sin(\frac{1}{x})\ge 1 \Rightarrow \frac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x}\le\frac{1}{x}$ (car x<0) $\Rightarrow f(x)\le\frac{1}{x}$

b) $f(x)\le\frac{1}{x}$ pour x<0 et $\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{x})=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

Rq : f n'admet pas de limite en 0

EXERCICE№18

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; I=$]2,+\infty[$ $\quad f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}<0$

f est continue et strictement décroissante sur $]2,+\infty[$

d'où $f(]2,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f, \lim\limits_{x\to 2^+} f\right[=]1,+\infty[$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$;I=$]-\infty,0]$ $\quad f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}<0 \ \forall x\in I$

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0] \Rightarrow f(]-\infty,0])=\left[f(0), \lim\limits_{-\infty} f\right[=[0,+\infty[$

3) $f(]0,\frac{\pi}{2}])=[f(\frac{\pi}{2}), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)[=[1,+\infty[$

4) $f(x)=tg(\pi x)$; I=$\left]-\frac{1}{2},0\right]$ $\quad f'(x)=\pi.(1+tg^2(\pi x)>0$

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2},0\right]$

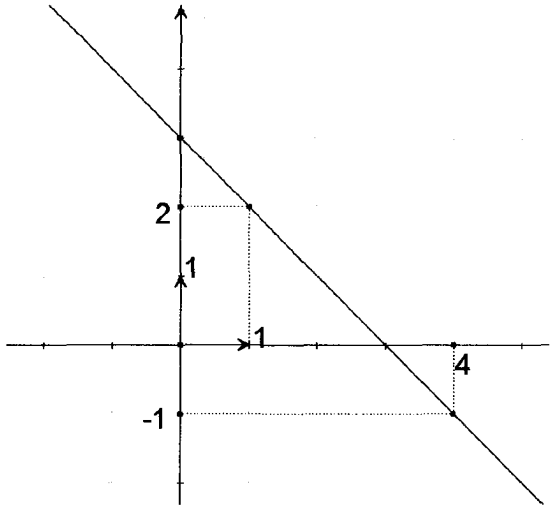
d'où $f(\left]-\frac{1}{2},0\right])=\left]\lim\limits_{(-\frac{1}{2})^+} f, f(0)\right]=]-\infty,0]$ $\quad$ (car $\lim\limits_{(-\frac{1}{2})^+} tg(\pi x)=-\infty$)

EXERCICE№19

1) f(I) = [-2,3]
2) f(I) = [-1,4]
3) f(I) = [1,2[∪ {3}
4) f(I) =] 1,4]

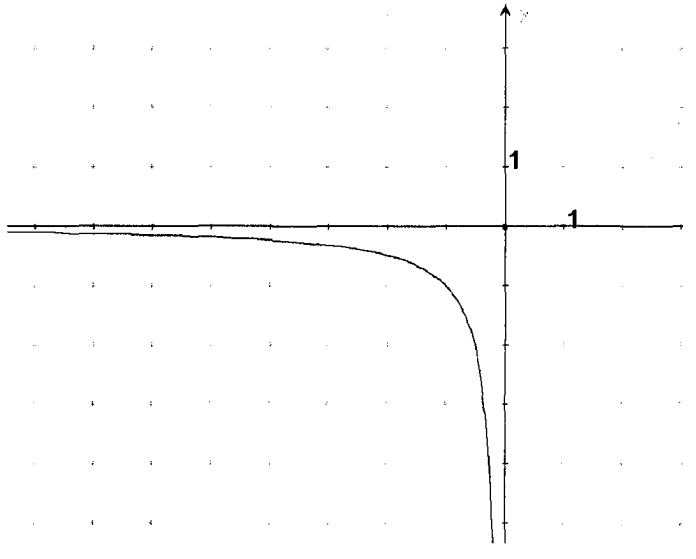
EXERCICE№20

1) $f(x) = -x + 3$ fonction affine ⇒sa courbe est une droite,



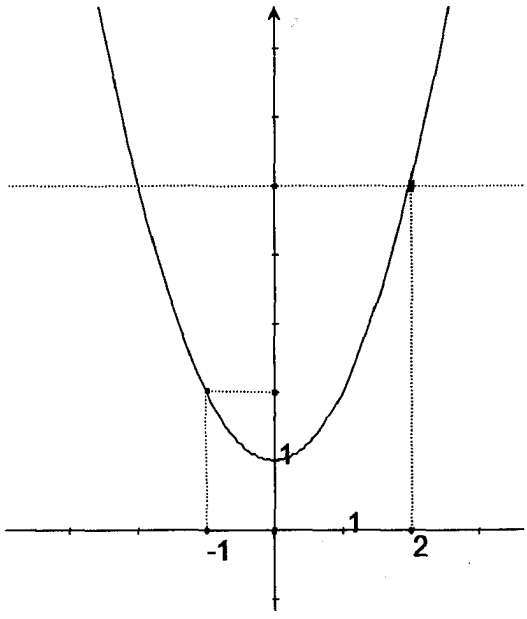
I = [1,4] f(I) = [-1,2]

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ ⇒sa courbe est une hyperbole ,



I =]-∞ ,0[f(I) =]-∞ ,0[

3) $f(x) = x^2 + 1$ $\Rightarrow$ sa courbe est une parabole



I =]-1,2] f(I) = [1,5]

EXERCICE№21

$f(x) = x^3 + 10x - 1$

1) – a) f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3x^2 + 10 > 0$ d'où f est strictement croissante sur IR

b) f est continue sur [0,1] , $f(0) \times f(1) = -10 < 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $a \in]0,1[$

* comme f est strictement croissante sur IR alors a est unique

2) $f(0) \times f(0,1) = -(0,1)^3 < 0$ d'où $0 < a < 0,1$; $a \approx 0,1$

EXERCICE№22

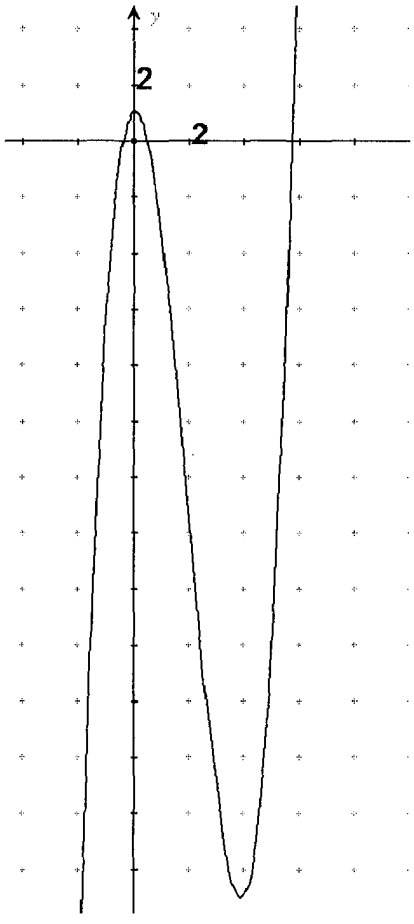
$f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 1$

1) f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3x^2 - 12x + 1$

x	$-\infty$		$\frac{6-\sqrt{33}}{3}$		$\frac{6+\sqrt{33}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\frac{6-\sqrt{33}}{3})$	↘	$f(\frac{6+\sqrt{33}}{3})$	↗	$+\infty$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet deux branches paraboliques de direction celle de $(o,\vec{j})$ au voisinage de $\pm\infty$



2) f est continue sur [0,1] et f(0) × f(1) = -3 < 0 d'où il existe un réel a de [0,1] telle que $f(a) = 0$

3) f(0,5)= …. ; f(0 ,6)=…..

$\Rightarrow$ f(0,5) × f(0,6) < 0 $\Rightarrow$ 0,5 < a < 0,6 ; a = 0,5

EXERCICE№23

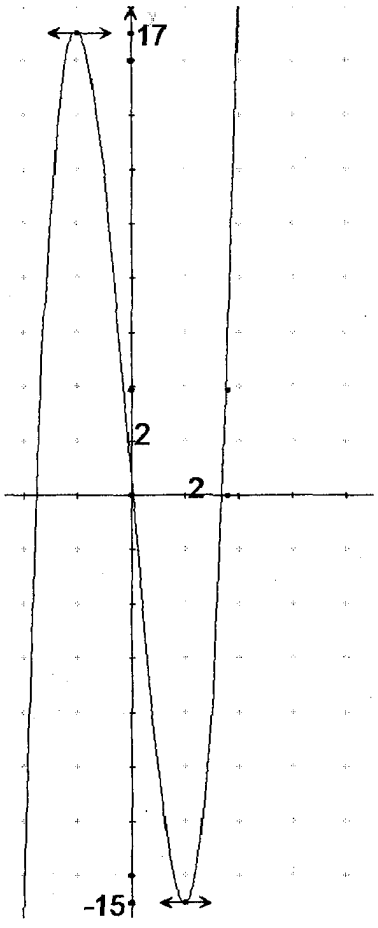
$f(x) = x^3 - 12\ x + 1$

1) f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3(x^2 - 4)$

x	-∞		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-∞	↗	17	↘	-15	↗	$+\infty$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$(\mathcal{C}_f)$ admet deux branches paraboliques de direction celle de $(o,\vec{j})$ au voisinage de $\pm\infty$



2) – a) $(\mathcal{C}_f) \cap (o,\vec{i}) = \{M_1 , M_2 , M_3\}$

b) f est continue sur [-4,-3] et $f(-4) \times f(-3) < 0 \Rightarrow -4 < x_1 < -3$

3) $0 < x_2 < 1$; $3 < x_3 < 4$

4) * pour k $\in$]-∞ , -15[∪]17 , +∞[, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution

* pour k $\in$ {-15 ;17 } l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions

* pour k $\in$]-15 ;17 [l'équation $f(x) = k$ admet trois solutions

5) l'équation $|f(x)| = 1$ admet six solutions (graphiquement)

EXERCICE№24

1) $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$

a) h est dérivable sur]0,+∞[et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} > 0$

d'où h est strictement croissante sur]0,+∞[

b) h est continue et strictement croissante sur]0,+∞[d'où :

$h(]0,+\infty[) =]\lim_{0^+} h, \lim_{+\infty} h\ [=]-\infty, +\infty[$

c) h est continue sur [2, 3] et $h(2) \times h(3) = (\sqrt{2} - \frac{3}{2})(\sqrt{3} - \frac{4}{3}) < 0$

d'où l'équation $h(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]2, 3[$

comme h est strictement croissante alors α est unique

d) (calculatrice :f(2,1)=-0,02 ;f(2,2)=0,02) $\Rightarrow \alpha \sim 2,1$

2) pour $x \in]0 ;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

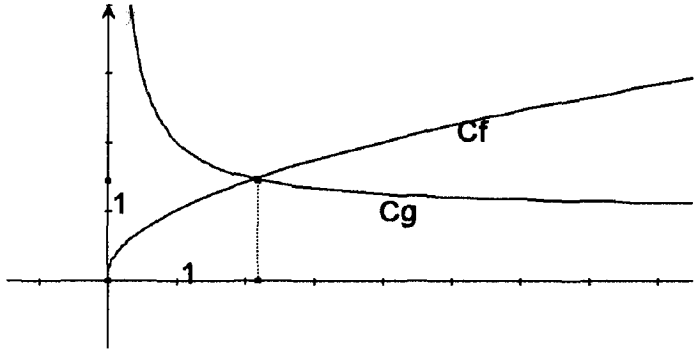
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

branche parabolique de direction celle de $(o,\vec{i})$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1



EXERCICE№25

1) $f(x) = cosx - x$

$f'(x) = -(1 + sinx) < 0$

pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

d'où f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

2) f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$f(0) \times f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ d'où il existe un réel $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(a) = 0$

comme f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ alors a est unique

3) (calculatrice) $0,7<a<0,8 \Rightarrow \quad a \approx 0,7$

EXERCICE№26

$G(x) = f(x) - x$

1) $g(0) \times g(1) = f(0) \times (f(1) - 1) \leq 0$ car $f(0) et (f(1) \in [0, 1]$

2) g est continue sur $[0, 1]$ et $g(0) \times g(1) \leq 0$

d'où l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [0, 1]$

par suite α est une solution de l'équation $f(x) = x$

application

soit $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 0$

pour $x \in [0, 1]$

f est décroissante sur $[0, 1]$

$f([0, 1]) = [f(1), f(10)] = [0, 1]$

d'après 2) l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution $\alpha \in [0, 1]$.

QCM

1. Un = $\frac{n^2+2}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \geq n$
2. Un = $\frac{n+\cos(n)}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$
3. Un = n.sin($\frac{1}{n}$) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

VRAI-FAUX

1. FAUX contre exemple : Un =$(-1)^n$
2. a) Vrai (th du cours)

   b)FAUX contre exemple : Un = -n et Vn =n+$\frac{1}{n}$

   Un+Vn converge vers 0 mais Un et Vn ne sont pas convergentes

3. FAUX contre exemple : Un =$(-1)^n$ $\rightarrow$ $(Un)^2=1$

   $(Un)^2$ converge vers 1 mais Un ne converge pas

4. FAUX voir définition

5. FAUX contre exemple : Un =$(-1)^n$

   U2n converge vers 1 ; U2n+1 converge vers -1 mais Un n'est pas

   Convergente

EXERCICE№1

1) $U_n = \frac{3n-1}{n+2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2-n+2} = 0$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3 - 2n^2 + 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty$

5) $U_n = \frac{3n-1}{|-n+2|}$

Pour n > 2 $U_n = \frac{3n-1}{n-2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

6) $U_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n+1}} = \sqrt{\frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

EXERCICE№2

$a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{n^2+1}$

1) $a_{2n} = \frac{2n[1+(-1)^{2n}}{4n^2+1} = \frac{4n}{4n^2+1}$; $a_{2n+1} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n}{4n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{4n+\frac{1}{n}} = 0$ d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et par suite a_n est convergente.

EXERCICE№3

$a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{n+1}$

1) $a_{2n} = \frac{2n[1+(-1)^{2n}]}{2n+1} = \frac{4n}{2n+1}$; $a_{2n+1} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = 2 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1}$ d'où (a_n) est divergente

EXERCICE№4

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ $(-1 < \frac{1}{3} < 1)$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3+2^n} = 0$

3) $U_n = \frac{2^n}{1+2^n} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$; $(-1 < \frac{1}{2} < 1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

EXERCICE№5

$U_n = \frac{2^n}{(-5)^{n+1}} = \frac{-1}{5}.\left(\frac{-2}{5}\right)^n$; $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$, car $(-1 < \frac{-2}{5} < 1)$

EXERCICE№6

1) $U_n = n + \sin n$

$\sin n \geq -1 \Rightarrow n + \sin n \geq n - 1 \Rightarrow U_n \geq n - 1$ et $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2) $U_n = \frac{1}{n}[\sin n + \left(\frac{1}{2}\right)^n]$; $(-1 \leq \sin n \leq 1)$

$\Rightarrow -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \sin n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\left[-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq U_n \leq \frac{1}{n}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) $U_n = -1 + \frac{1}{n^2}(\cos n + n)$; $(-1 \leq \cos n \leq 1)$

$\Rightarrow n - 1 \leq \cos n + n \leq n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}(\cos n + n) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - 1 \leq U_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1\right) = -1$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = -1$

EXERCICE№7

1) $U_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \ldots\ldots \times \frac{n-1}{n}$ en simplifiant on aura :

$U_n = \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

2) $V_n = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \ldots\ldots \times \frac{n+1}{n}$ en simplifiant on aura :

$V_n = \frac{n+1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

EXERCICE№8

$U_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$; $n \geq 1$

1) $n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}$ d'où $\left(\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) $0 \leq U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \geq 4$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

EXERCICE№9

$W_n = \frac{n!}{3^n}$; n∈ IN

1) $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$

$n \geq 3 \Longrightarrow n+1 \geq 4 \Longrightarrow \frac{n+1}{3} \geq \frac{4}{3}$, d'où $\frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{4}{3}$

2) démonstration par récurrence

*** vérifions pour n = 3**

$W_3 \geq \left(\frac{4}{3}\right)^0 W_3$ (donc la proprieté est vraie à l'ordre initial)

*** Soit n ≥ 3**

Supposant que : $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ et montrons que : $W_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} W_3$

D'après 1) : $W_{n+1} \geq \frac{4}{3} W_n \Longrightarrow W_{n+1} \geq \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$

$\Longrightarrow W_{n+1} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} W_3$

***conclusion :** $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ pour n ≥ 3

3) $W_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3$ pour n ≥ 3

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} W_3 = +\infty$ car : $W_3 > 0$ et $\frac{4}{3} \geq 1$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} W_n = +\infty$

EXERCICE№10

$U_n = \frac{n}{3^n}$; n ≥ 1

1) – a) $A_0(0,0)$; $A_1(1,\frac{1}{3})$; $A_2(2,\frac{2}{3^2})$; . . . . .

b) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$ pour : n ≥ 1 , $\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{2}{3} = \frac{1-n}{3n} \leq 0$

d'où : , $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$ pour : n ≥ 1

c) pour : n = 0 ; $U_0 = 0$; $U_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$, (vraie)

Supposant que : $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que : $U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

D'après b) : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$ *or* $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'où $U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

***conclusion :** $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour n ∈ IN

d) $0 \leq U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

2) pour k ≥ 1 on a : $U_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right)$: somme de n termes d'une suites géométrique

De raison $\left(\frac{2}{3}\right)$

D'où : $\sum_{k=1}^{n} U_k \leq 2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 2 \Rightarrow S_n \leq 2$ car $U_0 = 0$

b) $S_{n+1} - S_n = = \frac{n+1}{3^{n+1}} \geq 0$

(S_n) est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

EXERCICE№11

$a > 0$, $b_n = \frac{n}{(1+a)^n}$

1) $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \Rightarrow (1+a)^n \geq C_n^2 a^2 \Rightarrow (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)a^2}{2}$

2) pour n ≥ 2

$\frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{n(n-1)a^2} \Rightarrow \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{(n-1)a^2} \Rightarrow 0 \leq b_n \leq \frac{2}{(n-1)a^2}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{(n-1)a^2} = 0$ d'où : $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

3) $0 < q < 1$

a) $\frac{1}{q} > 1$ d'où il existe un réel $a > 0$ tel que $\frac{1}{q} = 1 + a$

par suite $q = \frac{1}{1+a}$

b) $x_n = x_0.q^n$; $|x_n| = \frac{|x_0|}{(1+a)^n} \Rightarrow n|x_n| = |x_0|\, b_n$

$\lim_{n \to +\infty} n|x_n| = 0$ d'après 2)

Par suite $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0$

4) – a) la suite $x_n = \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$

b) la suite $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} = 0$

c) $U_n = n.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

soit $x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in]0,1[$

D'où $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ *et* $\lim_{n \to +\infty} nx_n = 0$, par suite $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

EXERCICE№12

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases} , n \in \mathbb{N}^*$$

1) démonstartion par reccurence:

* pour n=1 , $U_1 = 1 \leq 3$ (vrai)

* supposons que : $U_n \leq 3$ et montrons que : $U_{n+1} \leq 3$

$U_n \leq 3 \Rightarrow 3.U_n \leq 9 \Rightarrow \sqrt{3.U_n} \leq 3 \Rightarrow U_{n+1} \leq 3$

conclusion : $U_n \leq 3 \ ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) $U_{n+1} - U_n = \sqrt{3.U_n} - U_n = \dfrac{3U_n - U_n^{\,2}}{\sqrt{3.U_n} + U_n} = \dfrac{U_n(3 - U_n)}{\sqrt{3.U_n} + U_n}$

on a : $U_n > 0$ et $3 - U_n \geq 0$ d'où $U_{n+1} - U_n \geq 0 \quad \Rightarrow U_n \leq U_{n+1}$

par suite : (U_n) est croissante

3) (U_n) est croissante et majorée par 3 elle est donc convergente

* soit ℓ sa limite

(U_n) est croissante $\Rightarrow U_n \geq U_1 \Rightarrow U_n \geq 1$ Donc $1 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \ell \leq 3$

* $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x}$ f est continue sur $[1,3]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \sqrt{3\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 3\ell \Leftrightarrow \ell(\ell - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 3$, $0 \notin [1,3]$ d'où $\ell = 3$

conclusion : $\lim U_n = 3$

EXERCICE№13

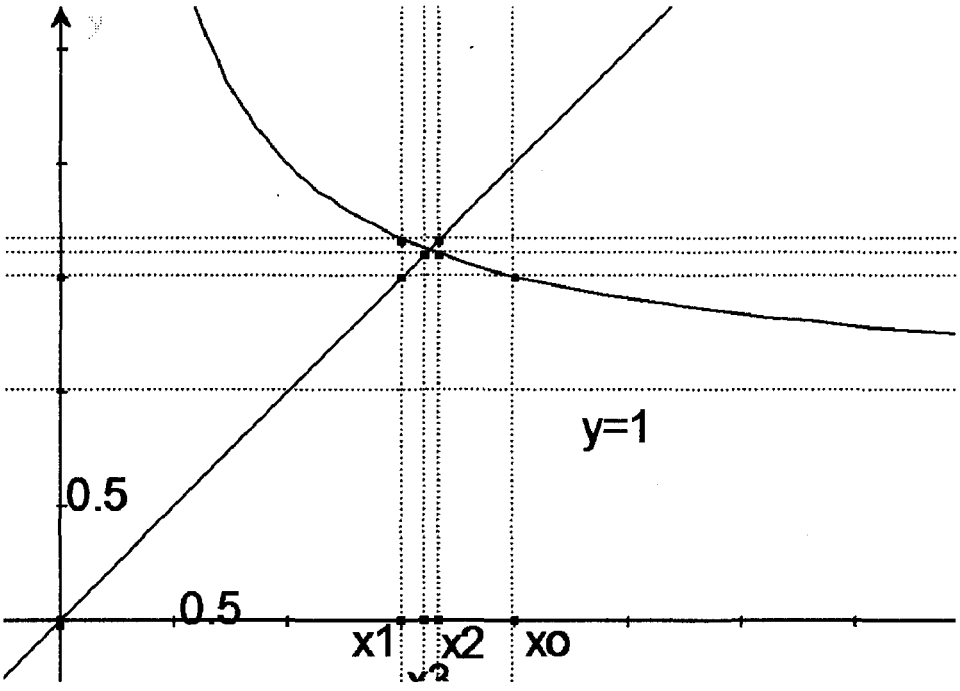
1) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$

f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ d'où

$$f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{+\infty} f, \lim_{0^+} f\right[=]1,+\infty[$$

x	0	$+\infty$
f'(x)	-	
f(x)	$+\infty$ ↘	1

2)



3) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$f(\varphi) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1 + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$